C.1

a) On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} n^3 = +\infty \quad ; \quad \lim_{n\mapsto+\infty} 5^n = +\infty$$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} n^3\times 5^n = +\infty$$

b) On a les deux limites suivantes :

- $\lim_{n\mapsto+\infty} n = +\infty$
- Puisque $0\leqslant\frac{2}{7}<1$, on a : $\lim_{n\mapsto+\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n = 0$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} n - \left(\frac{2}{7}\right)^n = +\infty$$

c) On a les deux limites suivantes :

- Puisque $0\leqslant\frac{1}{3}<1$, on a : $\lim_{n\mapsto+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$
- Puisque $\frac{3}{2}>1$, on a : $\lim_{n\mapsto+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{3}{2}\right)^n = -\infty$$

d) On a la transformation algébrique suivante :

$$8^n - 3^n = 8^n\cdot\left(1 - \frac{3^n}{8^n}\right) = 8^n\cdot\left[1 - \left(\frac{3}{8}\right)^n\right]$$

On a les deux limites suivantes :

- Puisque $8>1$, on a : $\lim_{n\mapsto+\infty} 8^n = +\infty$
- Puisque $0\leqslant\frac{3}{8}<1$, on a : $\lim_{n\mapsto+\infty} 1 - \left(\frac{3}{8}\right)^n = 1$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} 8^n - 3^n = \lim_{n\mapsto+\infty} 8^n\cdot\left[1 - \left(\frac{3}{8}\right)^n\right] = +\infty$$

e) On a les transformations algébriques suivantes :

$$\frac{5^n - 2^n}{3^n + 2^n} = \frac{5^n\cdot\left(1 - \frac{2^n}{5^n}\right)}{3^n\cdot\left(1 + \frac{2^n}{3^n}\right)} = \frac{5^n}{3^n}\cdot\frac{1 - \frac{2^n}{5^n}}{1 + \frac{2^n}{3^n}}$$

$$= \left(\frac{5}{3}\right)^n\cdot\frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

On a les deux limites suivantes :

- Puisque $\frac{5}{3}>1$, on a : $\lim_{n\mapsto+\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n = +\infty$
- Puisque $0\leqslant\frac{2}{5}<1$ et $0\leqslant\frac{2}{3}<1$, on a :

  $$\lim_{n\mapsto+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0 \quad ; \quad \lim_{n\mapsto+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

  On en déduit la limite : $\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} = 1$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{5^n - 2^n}{3^n + 2^n} = \lim_{n\mapsto+\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n\cdot\frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} = +\infty$$

f) On a les transformations algébriques suivantes :

$$\left(\frac{31}{7}\right)^n\cdot\left(\frac{2}{8}\right)^n = \left(\frac{31}{7}\times\frac{2}{8}\right)^n = \left(\frac{62}{56}\right)^n$$

De la comparaison $\frac{62}{56}>1$, on en déduit la limite suivante :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} \left(\frac{31}{7}\right)^n\cdot\left(\frac{2}{8}\right)^n = \lim_{n\mapsto+\infty} \left(\frac{62}{56}\right)^n = +\infty$$